**Statystyka**
**Lista 5**

**Zad 1.** Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbką z rozkładu $\mathcal{U}([0, \theta])$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.

a) Skonstruować estymator nieobciążony parametru $\theta$ postaci $\hat{\theta}_n := c_n \max\{X_1, ..., X_n\}$ z odpowiednio dobraną stałą $c_n$.

b) Obliczyć $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)$ i $\lim_{n\to\infty} n^2 \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)$. Wyciągnąć, stąd wniosek, że estymator $\hat{\theta}_n$ jest zgodny.

c) Zbadać zbieżność według rozkładu ciągów $n(\hat{\theta}_n - \theta)$ oraz $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$.

d) Skonstruować estymator nieobciążony parametru $\theta$. postaci $\tilde{\theta}_n := c_n \overline{X}_n$ z odpowiednio dobraną stałą $c_n$.

e) Obliczyć $\mathrm{Var}(\tilde{\theta}_n)$ i $\lim_{n\to\infty} n \mathrm{Var}(\tilde{\theta}_n)$.

f) Zbadać zbieżność według rozkładu ciągów $n(\tilde{\theta}_n - \theta)$ oraz $\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta)$.

g) Skonstruować asymptotyczne przedziały ufności parametru $\theta$ dla estymatorów $\hat{\theta}_n$ i $\tilde{\theta}_n$.

**Zad 2.** Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbką z rozkładu wykładniczego z nieznanym parametrem $\lambda > 0$.

a) Wyznaczyć estymator największej wiarygodności wartości $\mathbb{P}(X_1 > t)$. Pokazać, że otrzymany estymator jest asymptotycznie normalny i obliczyć jego asymptotyczną wariancję.

b) Wykazać, że statystyka $T_n(X_1, X_2, ..., X_n) = nX_{1:n}$ jest nieobciążony niezgodnym estymatorem parametru $\lambda$.

**Zad 3.** Rozważmy model liniowy

$$Y = X\beta + \varepsilon \ ,$$

gdzie $Y$ jest wektorem o $n$ współrzędnych, $X$ jest macierzą o wymiarach $n \times p$, $\beta$ jest wektorem o $p$ współrzędnych oraz $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathrm{Id})$. Dodatkowo zakładamy, że $\det(X^T X) > 0$ oraz $n > p$.

a) Wyznaczyć estymator największej wiarygodności dla $\beta$ oraz $\sigma^2$.

b) Skonstruować asymptotyczny przedział ufności dla parametru $\beta_1$ w przypadku, gdy $\sigma^2$ jest znana.

**Zad 4.** Niech $X \sim Bin(n, p)$. Skonstruować asymptotyczny przedział ufności dla parametru $p$.

**Zad 5.** Niech $(X_1, X_2, ..., X_n)$ będzie próbką z $Exp(\lambda)$.

a) Wyznaczyć rozkład $T = \lambda \sum_{i=1}^n X_i$.

b) Skonstruować asymptotyczny przedział ufności dla parametru $\lambda$.

**Zad 6.** Wyznaczyć ograniczenie dolne Cramera-Rao dla nieobciążonego estymatora $g(p) = p(1-p)$ opartego na próbce $X_1, ..., X_n \sim Bin(1, p)$.

**Zad 7.** Niech $(X_1, X_2, ..., X_n)$ będzie próbką z rozkładu Bernoulliego $\mathcal{B}(1, p)$, $p \in (0, 1)$. Wykazać, że nie istnieją nieobciążone estymatory wartości $g_1(p) = \dfrac{p}{1-p}$ oraz $g_2(p) = \dfrac{1}{p}$.